复变函数

黄晨
physchenhuang@gmail.com

2019年12月

1 复数与复数运算

复数

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

解析函数满足：**Cauchy-Riemann 条件**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

已知实部求虚部

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$v = \int^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)$$

三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

双曲函数

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

对数函数

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

2 复变函数的积分

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \left[u(x,y) + iv(x,y)\right]\left[\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y\right]$$

Example：曲线 C 是以 a 为中心且半径为 R 的圆，C 沿逆时针方向

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = 2\pi i\delta_{n,1}$$

小圆弧引理：设曲线 C_ρ 为 ρ 充分小的圆弧 $z = a + \rho e^{i\theta} \quad \alpha \le \theta \le \beta$。函数 $f(z)$ 在 C 上连续，且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = k$，则有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = i(\beta - \alpha)k$$

大圆弧引理：设曲线 C_ρ 为 ρ 充分大的圆弧 $z=a+\rho e^{i\theta}\quad \alpha\le\theta\le\beta$。函数 $f(z)$ 在 C 上连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=k$，则有

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = i(\beta-\alpha)k$$

若 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则有

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = -i(\beta-\alpha)\,\mathrm{Res}[f(\infty)]$$

Cauchy 积分定理

- 单连通
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$
- 复连通
$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

Cauchy 公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

3 复数级数

3.1 幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

- 如果 $0<R<+\infty$，则复数幂级数在开圆盘 $|z-z_0|<R$ 内部绝对收敛，在区域 $|z-z_0|>R$ 内处处发散。
- 如果 $R=+\infty$，则复数幂级数在全平面内收敛。
- 如果 $R=0$，则复数幂级数在除去 $z=\eta$ 的平面内处处发散。

3.2 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Taylor 级数在 $|z-z_0|<R$ 内收敛。

-
$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

- $$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$

- $$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad |z| < \infty$$

- $$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad |z| < \infty$$

- $$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

3.3 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-\eta)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z-\eta)^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-\eta)^k$$
$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\xi$$

Laurent 级数在环域 $r < |z - z_0| < R$ 内收敛。

孤立奇点的分类

- 可去奇点：没有负幂项
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (0 < |z - z_0| < R)$$
- 极点：有有限个负幂项
$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (0 < |z - z_0| < R)$$
- 本性奇点：有无限个负幂项
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

判断极点的阶

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$
$$\lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)] = a_{-m} = \text{非零有限值}$$

4 留数定理

留数

$$\mathrm{Res}[f(z_0)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \mathrm{d}z = a_{-1}$$
$$\mathrm{Res}[f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

留数定理：有限孤立奇点 η_j

$$\oint_l f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}[f(\eta_j)]$$

4.1 积分计算

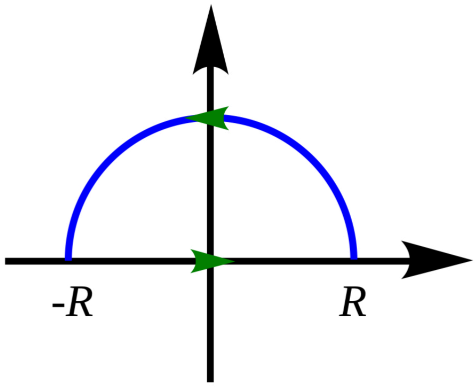
- $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$，其中 $R(x,y)$ 是关于 x,y 的有理函数。

$$z = e^{i\theta} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$，$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，且 $Q(x)$ 至少比 $P(x)$ 高两次。

Example[1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x \qquad a > 0$$



用上半平面的半圆 C_R 和线段 $[-R, R]$ 组成积分回路，定义函数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^3}$$

当 $R > a$ 时，C 的内部有一个三阶极点 $z = ai$

$$\mathrm{Res}[f(ai)] = \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{(z-ai)^3}{(z^2+a^2)^3}\right] = \frac{3}{16a^5 i}$$

留数定理给出

$$2\pi i\,\mathrm{Res}[f(ai)] = \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

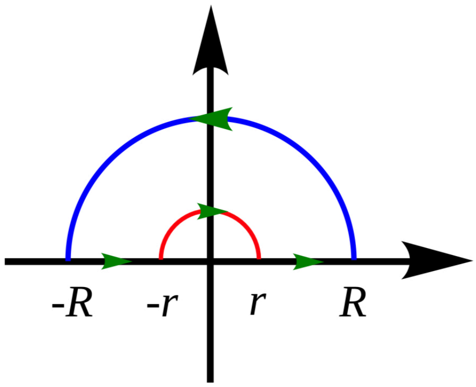
大圆弧引理给出

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8a^5}$$

Example[2]:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$



用上半平面的半圆 C_R，线段 $[-R, -r]$，半圆 C_r^-，和线段 $[r, R]$ 组成积分回路 C，定义函数

$$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$$

C 的内部没有奇点，由留数定理给出

$$0 = \int_{C_R + C_r^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} f(x)\mathrm{d}x + \int_r^R f(x)\mathrm{d}x$$

大圆弧引理

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

小圆弧引理

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = -i \;\Rightarrow\; \lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = \pi$$

函数的奇偶性

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\mathrm{d}x = \int_r^R f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{r\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_r^R f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

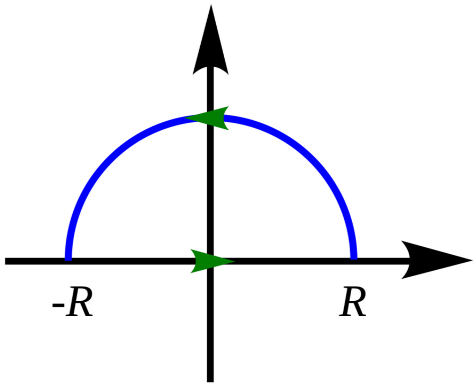
- $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(mx)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(mx)\mathrm{d}x$，$m>0$，$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，且 $Q(x)$ 至少比 $P(x)$ 高一次。

Jordan 引理: 设圆弧 C_R 为 $|z|=R$，当 R **充分大**时，函数 $f(z)$ 在 C_R 上连续，且 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$，则有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}\mathrm{d}z=0$$

Example[1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \qquad \lambda>0, a>0$$



定义函数

$$f(z)=\frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}$$

C 的内部有一个一阶极点 $z=ai$

$$\mathrm{Res}[f(ai)]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{(z-ai)e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}\right]=\frac{e^{-\lambda a}}{2ai}$$

留数定理给出

$$\frac{\pi}{a}e^{-\lambda a}=\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z+\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}z$$

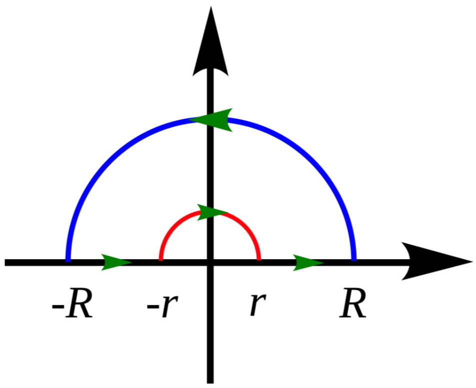
由 Jordan 引理

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{z^2+a^2}=0 \ \Rightarrow\ \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}e^{-\lambda a}$$

Example[2]:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$



定义函数

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{iz}$$

C 内部没有奇点，留数定理给出

$$0=\int_{C_R+C_r^-} f(z)\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-r} f(x)\mathrm{d}x+\int_r^R f(x)\mathrm{d}x$$

Jordan 引理

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{iz}=0 \ \Rightarrow\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

小圆弧引理

$$\lim_{r\to 0} zf(z)=-i \ \Rightarrow\ \lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z=\pi$$

函数的奇偶性

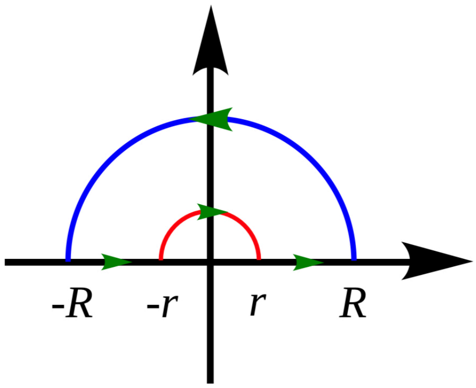
$$\int_{-R}^{-r} f(x)\mathrm{d}x=\int_r^R f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

- $\int_0^{+\infty}\ln(x)R(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_o^{+\infty}x^pR(x)\mathrm{d}x$ 形式的积分，$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，且 $Q(x)$ 至少比 $P(x)$ 高两次，$R(x)$ 在正实轴上没有奇点。

  Example[1]:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$



定义函数

$$f(z)=\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}$$

$\ln z$ 是多值函数，支点为 0 和 ∞，不在 C 围成的区域内部。我们取 $\ln z$ 的单值解析分支

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z \qquad 0\le\arg z<2\pi$$

C 的内部有一个二阶极点 $z=i$

$$\mathrm{Res}[f(i)]=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z-i)^2\ln z}{(z^2+1)^2}\right]=-\frac{1}{4i}+\frac{2}{8i}\ln i$$

对于所取定的单值解析分支

$$\ln i=\frac{\pi i}{2}$$

留数定理给出

$$\frac{\pi^2 i-2\pi}{4}=\int_{C_R+C_r^-}f(z)\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-r}f(z)\mathrm{d}z+\int_r^R f(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{-R}^{-r}f(z)\mathrm{d}z=\int_r^R\frac{\ln x+i\pi}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

综上，

$$\frac{\pi^2 i-2\pi}{4}=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x+i\int_0^{+\infty}\frac{i\pi}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$$

- 若实轴上有单极点

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}[f(z)]+\pi i\sum_{\text{实轴上}}\mathrm{Res}[f(z)]$$

5 Fourier

5.1 Fourier 级数

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right]$$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

三角函数的正交归一性

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x = 2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos(kx)\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin(kx)\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\mathrm{d}x = \delta_{k,l}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\mathrm{d}x = \delta_{k,l}$$

5.2 Fourier 积分与 Fourier 变换

- 实数形式的 Fourier 积分（展开为 Fourier 积分）

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right]\mathrm{d}\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x$$

  - Fourier 余弦变换对

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x$$

  - Fourier 正弦变换对

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega x)\mathrm{d}\omega$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x$$

- 复数形式的 Fourier 变换（做 Fourier 变换）

  - Fourier 逆变换 (原函数)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

  - Fourier 变换 (像函数)

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(x)]$$

5.3 Fourier 变换的性质

- 导数定理（原函数）

$$\mathscr{F}[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k \mathscr{F}[f(x)]$$

- 导数定理（像函数）

$$\{\mathscr{F}[f(x)]\}' = \mathscr{F}[-ixf(x)]$$

- 积分定理（原函数）

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = (i\omega)^{-1}\mathscr{F}[f(x)]$$

- 卷积定理

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = 2\pi\mathscr{F}[f_1(x)] \cdot \mathscr{F}[f_2(x)]$$

6 δ 函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ +\infty & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

δ 函数的 Fourier 变换和逆变换

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{2\pi}\mathrm{d}\omega = \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{2\pi}\mathrm{d}\omega = \delta(x)$$